DEPARTAMENTO
DE
MATEMÁTICAS

EXAMEN DE SEPTIEMBRE   MAT II   2º BTO B   1-9-10

ALUMNA/O:

1.- Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$

a) [1p] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como sus extremos relativos o locales.

b) [0,75p] Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) [0,75p] Determina las asíntotas de la gráfica de f.

2.- Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida por $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

a) [1p] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

b) [1,5p] Calcula el área del recinto limitado.

3.- Dado el sistema $\begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$

a) [1,5p] Discútelo según los valores del parámetro λ.

b) [1p] Resuélvelo para $\lambda = 0$.

4.- Sea r la recta definida por $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-k}{4} = \dfrac{z}{5}$ y s la recta definida por $s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

a) [1,5p] Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) [1p] Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

SOLUCIONES

1.- $f(x) = x + e^{-x}$

a) Función continua y derivable en R.

$f(x) = x + e^{-x} \to f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$si\ x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en $(-\infty, 0)$

$si\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente en $(0, +\infty) \to$ Mínimo en$(0,1)$

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f .

$f(x) = x + e^{-x} \to f'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x} > 0$

La segunda derivada es positiva en todo R, luego f es convexa en R

c) Determina las asíntotas de la gráfica de f .

Verticales no tiene

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{xe^{x}} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(x + e^{-x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{xe^{x}} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(x + e^{-x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{-x}\right) = +\infty$$ Asíntota oblicua: $y = x$ por la derecha

2.- $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

a)Puntos de corte:

$$\left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ y &= \frac{4}{x} \end{aligned}\right\}$$

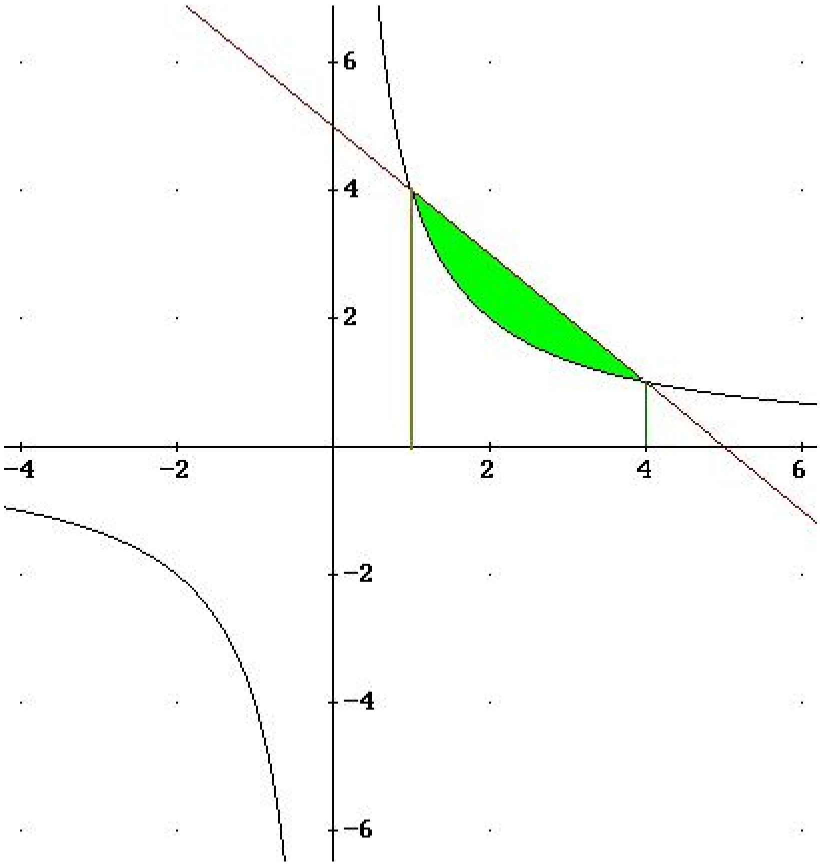
$$5 - x = \frac{4}{x} \to x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right. \to y = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

b) Área

$$A = \int_1^4 (5 - x)dx - \int_1^4 \frac{4}{x}dx$$

$$A = 5x - \frac{x^2}{2}\Bigg]_1^4 - 4\ln x\Big]_1^4$$



$A = 20 - 8 - 5 + \frac{1}{2} - (4\ln 4 - 4\ln 1) = \left(\frac{15}{2} - 4\ln 4\right)$ unidades de área

3.- a) Discútelo según los valores del parámetro λ.

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de la matriz del sistema:

Es al menos 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por otra parte $|A| = \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$

DISCUSIÓN:

Para $\lambda = 0 \rightarrow r(A) = 2$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r(A^*) = 2$ Compatible Indeterm.

Para $\lambda = 6 \rightarrow r(A) = 2$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A^*) = 2$

Compatible Indeterminado

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$ $r(A) = 3$ y $r(A^*) = 3$ Compatible Determinado

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$, es compatible indeterminado, como hemos visto ya.

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ x = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow SOL: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

4.- $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$.

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = k + 4t \\ z = 5t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = 1 + 2s \\ z = 3 + 3s \end{cases}$ estudiemos el sistema

$\left.\begin{array}{l} 3t + s = -4 \\ 4t - 2s = 1 - k \\ 5t - 3s = 3 \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$; $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 1-k \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, para que se corten en un punto esta matriz tiene que tener también rango 2, es decir $|A^*| = 0$

$$|A^*| = -18 + 5 - 5k + 48 - 40 + 9 - 9k - 12 = -14k - 8 = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{7}$$

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Direcciones: $\vec{u}(3,4,5)$; $\vec{v}(-1,2,3)$, Punto de s: $P(-2,1,3)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 12x+24-5y+5+6z-18+4z-12-10x-20-9y+9=0$$

$$\pi \equiv 2x-14y+10z-12=0 \rightarrow \pi \equiv x-7y+5z-6=0$$